

Contrôle final de Thermodynamique (1h 30 mn)

Question de cours (5 pts)

1°) A partir de la définition de l'enthalpie : $H = U + PV$, montrer que la relation de Rober-Mayer, pour une mole de gaz parfait, s'écrit sous la forme : $C_p - C_v = R$

R : constante universelle des gaz parfait, C_p et C_v sont respectivement les capacités thermiques à pression et volume constants.

2°) Ecrire la relation de Mayer pour n moles.

3°) Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et en utilisant la relation de Mayer, déterminer les expressions de C_p et C_v en fonction de R , de γ et du nombre de mole n .

Exercice (15 pts)

On fait décrire à une mole d'un gaz parfait diatomique le cycle Diesel constitué des transformations réversibles suivantes :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique ;
- $2 \rightarrow 3$: chauffage isobare ;
- $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique ;
- $4 \rightarrow 1$: refroidissement isochore.

On donne : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$; les rapports volumétriques des transformations adiabatiques :

$$a = \frac{V_1}{V_2} = 9 \quad \text{et} \quad b = \frac{V_4}{V_3} = 3 \quad ; \quad R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} ; P_1 = 10^5 \text{ Pa} ; T_1 = 300 \text{ K}.$$

1°) Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, V). Justifier que le cycle est moteur.

2°) Calculer le volume V_1 du gaz à l'état 1.

3°) Déterminer les expressions de P_2 , P_3 et P_4 en fonction de a , b , γ et P_1 . Calculer leurs valeurs

4°) Déterminer les expressions de V_2 , V_3 et V_4 en fonction de a , b , γ et V_1 . Calculer leurs valeurs

5°) Déterminer et calculer les quantités de chaleur échangées au cours des différentes transformations.

6°) Déterminer et calculer les travaux mis en jeu le long du cycle. Déduire la variation de l'énergie interne sur tout le cycle.

7°) Déterminer les expressions de la variation d'entropie pour chaque transformation. Calculer leurs valeurs et vérifier que la variation d'entropie sur tout le cycle est nulle.

8°) Le cycle Diesel reçoit une quantité de chaleur Q_c durant la transformation $2 \rightarrow 3$ et rejette une quantité de chaleur Q_a durant la transformation $4 \rightarrow 1$. Etablir l'expression du rendement thermique du moteur en fonction de Q_c et Q_a . Calculer sa valeur.

9°) Montrer que l'expression du rendement thermique s'écrit en fonction de a , b et γ sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$1^{\circ}) H = U + PV$$

$$dH = dU + d(PV)$$

avec

$$\begin{cases} dH = C_p dT \\ dU = C_v dT \end{cases}$$

$$d(PV) = R dT \quad (n=1)$$

$$\Rightarrow C_p dT = C_v dT + R dT$$

$$\Rightarrow C_p = C_v + R$$

$$\text{donc } \boxed{C_p - C_v = R}$$

2^o) pour n moles

$$dH = dU + d(PV)$$

$$C_p dT = C_v dT + nR dT$$

$$C_p = C_v + nR$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p - C_v = nR}$$

$$3^{\circ}) \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{nR + C_v}{C_v}$$

$$\Rightarrow C_v \gamma = nR + C_v$$

$$\Rightarrow C_v (\gamma - 1) = nR$$

$$\boxed{C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_p = \gamma C_v$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$$

Exercice

* le cycle est moteur car le parcours est effectué dans le sens horaire

$$2^{\circ}) P_1 V_1 = nRT_1$$

$$\boxed{V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}} \quad (n=1)$$

$$V_1 = \frac{8,32 \times 300}{10^5}$$

$$V_1 = 0,025 \text{ m}^3$$

$$\boxed{V_1 = 25 \text{ l}}$$

$$3^{\circ}) P_2 V_2^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} = P_1 a^{\gamma}$$

$$\boxed{P_2 = P_1 a^{\gamma}}$$

$$P_3 = P_2 \Rightarrow \boxed{P_3 = P_1 a^{\gamma}}$$

$$P_4 V_4^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma} = P_1 a^{\gamma} V_3^{\gamma}$$

$$\Rightarrow P_4 = P_1 a^{\gamma} \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma}$$

$$\boxed{P_4 = P_1 \left(\frac{a}{b} \right)^{\gamma}}$$

Like : www.facebook.com/allenwesttp

$$V_2 = \frac{V_1}{a}$$

$$V_3 = \frac{V_4}{b} = \frac{V_1}{b}$$

$$V_3 = \frac{V_1}{b}$$

$$V_4 = V_1$$

$$Q_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \int C_p dT = C_p (T_3 - T_2) \\ &= C_p \left(\frac{P_3 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right) \\ &= \frac{C_p P_2}{R} (V_3 - V_2) \\ &= \frac{C_p P_2}{R} \left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a} \right) \\ &= \frac{C_p P_2}{R} V_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{C_p P_1 a^{\gamma} V_1}{R} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ &= C_p a^{\gamma} T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

$$Q_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} a^{\gamma} T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$Q_{23} = 42.08 \text{ KJ}$$

$$Q_{34} = 0$$

$$\begin{aligned} Q_{41} &= \int C_v dT = C_v (T_1 - T_4) \\ &= C_v \left(\frac{P_1 V_1}{R} - \frac{P_4 V_4}{R} \right) \\ &= \frac{C_v V_1}{R} (P_1 - P_4) \end{aligned}$$

$$= \frac{C_v V_1}{R} P_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\gamma} \right)$$

$$= T_1 \cdot C_v \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\gamma} \right)$$

$$Q_{41} = \frac{R}{\gamma - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\gamma} \right)$$

$$Q_{41} = -22.81 \text{ KJ}$$

$$\begin{aligned} W_{12} &= - \int_1^2 P dv = - P_1 V_1^{\gamma} \int_1^2 \frac{dv}{v^{\gamma}} \\ &= - P_1 V_1^{\gamma} \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2} \\ &= - P_1 V_1^{\gamma} \left(\frac{V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \\ &= \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{1-\gamma} = \frac{P_1 V_1 - P_1 a^{\gamma} \cdot \frac{V_1}{a}}{1-\gamma} \end{aligned}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1}{1-\gamma} (1 - a^{\gamma-1})$$

$$W_{12} = 8.79 \text{ KJ}$$

$$\begin{aligned} W_{23} &= - \int_2^3 P dv = - P_2 \int_2^3 dv \\ &= - P_2 (V_3 - V_2) \\ &= P_2 a^{\gamma} (V_2 - V_3) = P_2 a^{\gamma} \left(\frac{V_1}{a} - \frac{V_1}{b} \right) \\ &= P_2 a^{\gamma} V_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

$$W_{23} = R T_1 a^{\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W_{23} = -12.02 \text{ KJ}$$

Like: www.facebook.com/allcountdtp

$$\begin{aligned}
 W_{34} &= - \int_3^4 P dv = - P_3 V_3^\gamma \int_3^4 \frac{dv}{v^{1+\gamma}} \\
 &= P_3 V_3^\gamma \frac{V_3^{1-\gamma} - V_4^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{P_3 V_3 - P_4 V_4}{1-\gamma} \\
 &= \frac{P_1 a^\gamma V_1 / b - P_1 \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma V_1}{1-\gamma}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{P_1 V_1}{1-\gamma} \left(\frac{a^\gamma}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma \right)$$

$$W_{34} = \frac{RT_1}{1-\gamma} \cdot a^\gamma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^\gamma} \right)$$

$$W_{34} = -16.03 \text{ kJ}$$

$$W_{41} = 0$$

$$* \Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{cycle}} + W_{\text{cycle}}$$

$$= (42.08 - 22.87) + (8.79 - 12.02 - 16.03)$$

$$= 0$$

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0$$

$$7) \Delta S_{12} = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\Delta S_{12} = 0$$

$$\Delta S_{23} = \int \frac{\delta Q}{T} = C_P \int \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \left[\ln T \right]_{T_2}^{T_3}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{P_3 V_3 / R}{P_2 V_2 / R} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{V_1 / b}{V_1 / a}$$

$$\Delta S_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$\Delta S_{23} = 32 \text{ J}$$

$$\Delta S_{34} = 0$$

$$\Delta S_{41} = \int \frac{\delta Q}{T} = C_V \int \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_4} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1 V_1 / R}{P_4 V_4 / R}$$

$$= \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1}{P_4} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1}{P_1 \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma}$$

$$\Delta S_{41} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{b}{a} \right)^\gamma$$

$$\Delta S_{41} = -32 \text{ J}$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 32 - 32$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0$$

$$8) \eta = 1 - \frac{|\Phi_{n1}|}{\Phi_{23}} = 1 - \frac{22,41}{42,08}$$

$$\eta = 45,8\%$$

$$9) \eta = 1 - \frac{|\Phi_{n1}|}{\Phi_{23}}$$

$$= 1 + \frac{\Phi_{n1}}{\Phi_{23}}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{r} \cancel{a}^r \cancel{T}^r (1 - (\frac{a}{b})^r)}{\cancel{r}^r \cancel{a}^r \cancel{T}^r (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})}$$

$$= 1 + \frac{1 - (\frac{a}{b})^r}{r a^r (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})}$$

$$= 1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{a^{-r} (1 - (\frac{a}{b})^r)}{b^{-r} - a^{-r}}$$

$$= 1 + \frac{1}{r} \frac{a^{-r} - b^{-r}}{b^{-r} - a^{-r}}$$

$$= 1 - \frac{1}{r} \frac{b^{-r} - a^{-r}}{b^{-r} - a^{-r}}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \frac{b^{-r} - a^{-r}}{b^{-r} - a^{-r}}$$

START



Cours-TD-TP
Site Internet éducatif

J'aime S'abonner Message

Journal À propos Photos Mentions J'aime Vidéos

Cours-TD-TP
J'aime

3 434 personnes aiment Cours-TD-TP.



Module social Facebook

<https://www.facebook.com/allcourstdtp>